

Module 3 - Quelques lois de probabilité discrètes

STT-1000 Probabilités et statistique

Département de mathématiques et de statistique



UNIVERSITÉ
LAVAL

Introduction

Contexte

Il existe plusieurs lois discrètes bien connues, ayant même des noms pour les identifier, et pour lesquelles on connaît bien le comportement et les caractéristiques.

Plusieurs de ces lois sont reliées aux résultats d'expériences aléatoires simples, par exemple une expérience qui peut résulter en un succès ou un échec.

Ex. On lance une pièce de monnaie. On déclare un succès si pile et échec si face.

On verra cinq de ces lois dans le cours.

Quelques résultats utiles pour les preuves

- Théorème du binôme (rappel) :

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x + y)^n$$

- Séries géométriques :

$$\sum_{i=0}^n p^i = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i = 1 + p + p^2 + \dots = \frac{1}{1 - p} \quad \text{si } |p| < 1$$

- Expansion de e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Un concept important - v.a. indépendantes

Dans ce module et le suivant, on parlera à quelques reprises de **variables aléatoires indépendantes**. Ce concept sera formellement défini plus tard.

Pour l'instant, on se limite à cette définition : **deux variables aléatoires sont indépendantes si connaître la valeur de l'une des variables aléatoires ne nous renseigne en rien sur la valeur de la deuxième variable aléatoire.**

Si X et Y sont indépendants, nous notons $X \perp Y$.

Une propriété utile qui découle de l'indépendance de X et Y est $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Exemple

Je lance un dé et une pièce de monnaie. Soit X qui est le résultat du dé et Y qui prend la valeur 0 si la pièce de monnaie tombe sur «pile» ou 1 si la pièce de monnaie tombe sur «face». Alors, X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, car le résultat du dé n'a aucune influence sur le résultat de la pièce de monnaie, et vice-versa.

Loi de Bernoulli

Loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire, telle que $X = 1$ si l'expérience est un succès et $X = 0$ si l'expérience est un échec. Nous associons une probabilité p au succès et $1 - p$ à l'échec.

On dit que X suit une loi de Bernoulli avec probabilité p , ce qu'on dénote

$$X \sim \text{Bernoulli}(p).$$

La fonction de probabilité (aussi appelée fonction de masse, ou fonction de masse de probabilité) de la loi de Bernoulli(p) est

$$p(x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1 - p, & x = 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Loi de Bernoulli

Espérance :

Variance :

Loi binomiale

Loi binomiale

On suppose $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi Bernoulli, i.e. $Y_i \sim \text{Bernoulli}(p)$, pour tout $i = 1, \dots, n$.

On définit la variable aléatoire X comme étant le nombre total de succès parmi $Y_1, \dots, Y_n$. On peut écrire

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i$$

On dit que X suit une loi binomiale avec paramètres n et p , ce qu'on dénote

$$X \sim \text{Binomiale}(n, p).$$

Loi binomiale

On veut $p(x) = P(X = x) = P(\text{observer } x \text{ succès})$.

Nous cherchons la probabilité d'avoir x succès, et donc $n - x$ échecs. Puisque les essais sont indépendants, la probabilité de chacun des résultats avec x succès et $n - x$ échec est

$$p^x(1 - p)^{n-x}$$

Il faut prendre en compte le nombre de façons d'avoir x succès parmi n essais.

$$\binom{n}{x}$$

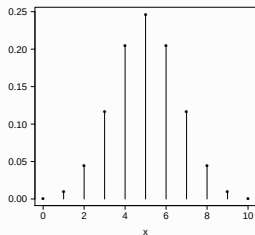
Donc, si $X \sim \text{Binomiale}(n, p)$, alors

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, & x = 0, 1, \dots, n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

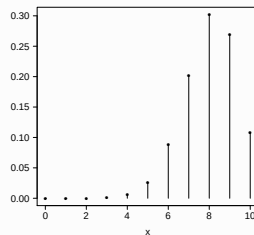
Loi binomiale

Vérifiez que $p(x)$ donnée plus haut est bien une fonction de probabilité.

Loi binomiale



Binomiale($n=10, p=0.5$)



Binomiale($n=10, p=0.8$)

Dans tous les cas :

- Les valeurs possibles sont $0, 1, 2, \dots, n$.
- La valeur de x avec la plus grande probabilité est np (arrondi à l'entier le plus près).
- La fonction de probabilité croît jusqu'à $x = np$ puis décroît par la suite.

Loi binomiale

Si $X \sim \text{Binomiale}(n, p)$, alors

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x p(x) = \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-1-y)!} p^y (1-p)^{n-y-1} \quad \text{en posant } y = x - 1 \\ &= np \end{aligned}$$

Loi binomiale

D'où vient la simplification qui nous permet de passer de l'avant-dernière ligne à la dernière ?

Variance

On peut calculer $V(X)$ de façon similaire à $E(X)$.

Plus simplement : Si $X \sim \text{Binomiale}(n, p)$ alors on peut écrire

$$X = Y_1 + \dots + Y_n$$

où les Y_i sont des variables aléatoires de loi Bernoulli(p) indépendantes.

$$\begin{aligned} V(X) &= V\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n V(Y_i) \quad \text{car } Y_i \perp Y_j, i \neq j \\ &= \sum_{i=1}^n p(1-p) \quad \text{car } Y_i \sim \text{Bernoulli}(p) \forall p \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

Loi géométrique

Loi géométrique

On suppose

- une suite d'essais **indépendants**;
- chaque essai résulte en un succès ou un échec;
- la probabilité de succès **à chaque essai** est p ;
- on arrête l'expérience lorsqu'on obtient **un premier succès**.

Soit X , le **nombre total d'essais nécessaires** pour obtenir ce premier succès.

On dit que X suit une loi géométrique avec probabilité de succès p , ce qu'on dénote

$$X \sim \text{Géométrique}(p).$$

Loi géométrique

Si $X \sim \text{Géométrique}(p)$,

$$p(x) = P(X = x) = P(x - 1 \text{ échecs suivis de 1 succès})$$

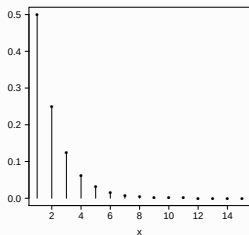
Donc,

$$p(x) = \begin{cases} (1 - p)^{x-1} p, & x = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

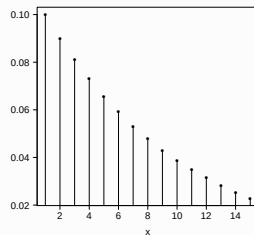
Loi géométrique

Vérifiez que $p(x)$ donnée plus haut est bien une fonction de probabilité.

Loi géométrique



Géométrique($p=0.5$)



Géométrique($p=0.1$)

Dans tous les cas :

- Les valeurs possibles sont tous les entiers positifs $(1, 2, \dots)$.
- La fonction de probabilité est décroissante.
- Plus p est grand, plus elle décroît rapidement.

Loi géométrique

Si $X \sim \text{Géométrique}(p)$, alors

$$E(X) = 1/p$$

$$V(X) = (1 - p)/p^2$$

Preuve pour l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x^{\infty} x p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} p \\ &= \left[\frac{d}{dp} \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^x \right] p(-1) \\ &= -p \frac{d}{dp} \frac{1-p}{p} \\ &= -p \frac{(-1) * p - (1-p) * 1}{p^2} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Propriété intéressante

La loi géométrique est **la seule loi discrète sans mémoire**, c'est-à-dire que

$$P[X > x + s | X > s] = P[X > x]$$

pour tous $x, s = 1, 2, 3, \dots$

En d'autres mots, le nombre d'essais pour obtenir un succès ne dépend pas du nombre d'essais déjà effectués.

Loi binomiale négative (Pascal)

Loi binomiale négative (Pascal)

Comme pour la loi géométrique (essais **indépendants**, chaque essai résulte en un succès ou un échec, probabilité de succès **à chaque essai** égale à p), mais on arrête l'expérience lorsqu'on obtient **un r -ème succès** (plutôt qu'un premier succès).

Soit X , le **nombre total d'essais nécessaires** pour obtenir ces r succès.

On dit que X suit une loi négative binomiale avec paramètres r et p , ce qu'on dénote

$$X \sim \text{NB}(r, p).$$

À noter, le livre utilise le terme «loi de Pascal», ce qui est peu utilisé en pratique.

Loi binomiale négative

Si $X \sim \text{NB}(r, p)$,

$$p(x) = P(X = x) = P(x \text{ essais avant d'avoir } r \text{ succès})$$

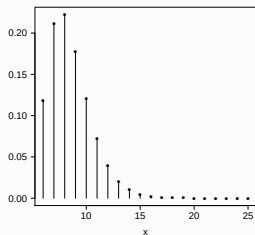
Donc,

- On doit obtenir r succès et $x - r$ échecs.
- Le dernier essai doit être un succès.
- Les autres $r - 1$ succès peuvent être positionnés de n'importe quelle façon dans les premiers $x - 1$ essais.

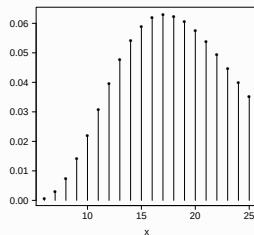
Donc,

$$p(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, & x = r, r+1, \dots \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Loi binomiale négative



Pascal($r=6, p=0.7$)



Pascal($r=6, p=0.3$)

Dans tous les cas :

- Les valeurs possibles sont tous les entiers positifs plus grands que r ($r, r + 1, \dots$).
- Plus p est petit, plus les valeurs probables sont grandes.
- Plus r est grand, plus les valeurs probables sont grandes.

Espérance et variance

Si $X \sim \text{NB}(r, p)$, alors on peut écrire

$$X = Y_1 + \dots + Y_r$$

où les Y_i sont indépendantes et $Y_i \sim \text{Géométrique}(p)$ pour tout i .

Donc,

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

et

$$V(X) = r \frac{(1-p)}{p^2}$$

Loi de Poisson

Loi de Poisson

On obtient habituellement une loi de Poisson dans l'une des deux situations suivantes :

- **Loi des événements rares** : Considérons X une v.a. binomiale où n est très, très grand et p est très, très petit. Soit μ la limite de np quand $n \rightarrow \infty$ et $p \rightarrow 0$. Alors on peut montrer qu'à la limite, on obtient

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, & x = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Nombre d'événements dans un intervalle de temps fixé** (*Processus de Poisson*) : Sous certaines conditions, si on observe en moyenne λ événements par unité de temps (ou d'espace), alors le nombre d'événements X dans t unités de temps (ou d'espace) suit une loi de Poisson de moyenne $\mu = \lambda t$.
(On y reviendra au module 4.)

Loi de Poisson

Si $X \sim \text{Poisson}(\mu)$, alors

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, & x = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

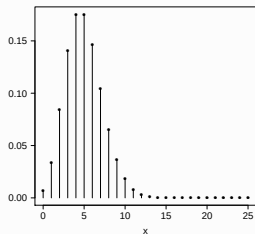
Si $X \sim \text{Poisson}(\mu)$, alors

$$E(X) = \mu$$

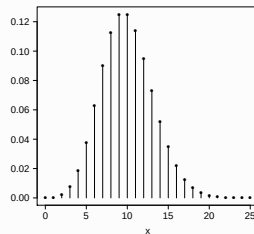
$$V(X) = \mu$$

Voir les preuves à la page 125 du manuel.

Loi de Poisson



Poisson($\mu = 5$)



Poisson($\mu = 10$)

Dans tous les cas :

- Les valeurs possibles sont tous les entiers non-négatifs (0, 1, 2, ...).
- Les valeurs les plus probables sont concentrées autour de l'espérance.

Loi de Poisson

La loi de Poisson a deux propriétés importantes :

Additivité :

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. indépendantes avec $X_i \sim \text{Poisson}(\mu_i)$ et $Y = X_1 + \dots + X_n$, alors

$$Y \sim \text{Poisson}(\mu_1 + \dots + \mu_n).$$

Approximation de la binomiale :

Lorsque n est grand et p est petit (par exemple $n \geq 20$ et $p \leq 0,05$), on peut approximer la loi Binomiale(n, p) par une loi Poisson($\mu = np$).

Quelques exemples

Tirs d'un chasseur

Un chasseur a une chance sur 3 d'atteindre une cible à chaque balle qu'il tire, et ses résultats d'un tir à l'autre sont indépendants. Quelle est la probabilité qu'il lui faudra tirer 4, 5 ou 6 balles pour atteindre sa cible ?

Tirs d'un chasseur (suite)

Combien de balles seront requises en moyenne pour atteindre la cible ?

Combien de balles, en moyenne, sont requises pour que ce chasseur atteigne 5 cibles ?

Tirs d'un chasseur (suite)

Quelle est la probabilité que plus de 6 balles soient requises pour atteindre 5 cibles ?

Examen à choix multiples

Un examen compte 20 questions à choix multiples, avec 5 choix de réponses à chacune des questions. Si on répond de façon complètement aléatoire aux 20 questions et que l'on reçoit 10 points pour une bonne réponse et -2 points pour une mauvaise réponse, quel est notre score attendu à cet examen ?

Des bulles d'air dans le béton

Le nombre de bulles d'air dans un mélange de béton suit une loi de Poisson de moyenne 1 bulle par 10 m^3 . Quelle est la probabilité qu'un pavé fait avec 20 m^3 de ce béton ait au moins une bulle d'air ?

Quelle est la moyenne du nombre de bulles dans de tels pavés ?

Calcul de revenus

Une firme d'informaticiens est engagée pour concevoir un logiciel de prise en rendez-vous . Elle sera payée 25 000\$ pour ce travail, plus un bonus de 5 000\$ si le logiciel est terminé à la date prévue. Quelle est la moyenne et la variance des revenus de cette compagnie pour ce contrat si la probabilité de terminer dans les temps est de 20% ?

Lancers d'une pièce de monnaie

On lance une pièce de monnaie balancée 10 fois. On suppose que les résultats obtenus à chaque lancer sont indépendants. Calculez

- (i) l'espérance et la variance du nombre de «pile» obtenus;
- (ii) la probabilité d'obtenir exactement deux «pile»;
- (iii) la probabilité d'obtenir au moins deux «pile».

Des entrevues

Une entreprise doit faire passer des entrevues jusqu'à l'embauche de 2 nouveaux employés. Chaque entrevue résulte en une embauche avec probabilité de 25% et les décisions prise à chacune des entrevues sont indépendantes. Une entrevue résultant en une embauche coûte 500\$ et une entrevue ne résultant pas en une embauche coûte 100\$. Quels sont l'espérance et l'écart-type du coût total des entrevues?

Réponses des exemples

Réponses des exemples

- **Exemple (tirs d'un chasseur) :** $P(X \in \{4, 5, 6\}) = 152/729 \approx 0,2085$; **(suite) pour atteindre 1 cible,** $E(X) = 1/p = 3$ **balles en moyenne, et pour atteindre 5 cibles,** $E(X) = r/p = 15$ **balles en moyenne;** **(suite)** $P(X > 6 \text{ pour atteindre 5 cibles}) = 716/729 \approx 0,9822$.
- **Exemple (examen à choix multiples) :** **score attendu** $= 20 \times (10 \times 0,2 - 2 \times 0,8) = 8$ **points.**
- **Exemple (bulles d'air dans le béton) :** $\mu = 2$ **bulles pour** 20 m^3 ; $P(X \geq 1) = 1 - e^{-2} \approx 0,8647$; **moyenne** $= \mu = 2$ **bulles.**
- **Exemple (calcul de revenus) :** $E(Y) = 26\,000\$$; $V(Y) = 4\,000\,000\$^2$.
- **Exemple (lancers d'une pièce de monnaie) :** **(i)** $E(X) = 5$, $V(X) = 2,5$; **(ii)** $P(X = 2) = 45/1024 \approx 0,0439$; **(iii)** $P(X \geq 2) \approx 0,9893$.
- **Exemple (des entrevues) :** $E(Y) = 1\,600\$$; $V(Y) = 240\,000\$^2$ ($\sigma_Y \approx 489,9\$$).

Bibliographie

Ce document est rédigé avec Beamer ainsi qu'une classe .cls fournie par Jérôme Soucy. Les diapositives sont adaptées des diapositives créées par Anne-Sophie Charest pour le cours STT-1000. Les graphiques proviennent de ces mêmes diapositives.

Pour signaler une erreur dans ce document, veuillez écrire à l'adresse : julien.miron@mat.ulaval.ca.